Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

— Mise en évidence des résultats

— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle

— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur

— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*Banque PT, Maths B 2024*)

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On étudie la courbe Λ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = \dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{cases}$;

On note $M(t)$ le point de Λ de paramètre t pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ à $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Préciser comment obtenir la courbe Λ en entier.
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x et y sur I. Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.
3. Quelle est la nature du point $M(0)$? Préciser la tangente en ce point.
4. Donner les coordonnées du point $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celles d'un vecteur directeur de la tangente à Λ en ce point.
5. Étudier la branche infinie lorsque t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
6. Tracer la courbe Λ sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet. On y fera apparaitre les éléments déterminés dans les questions précédentes. Unité : 8 cm

Exercice 2

(Banque PT, Maths B 2024)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{E}_1)$: $M^2 - 2M = A$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2x = -1$$

$$(E_3) : x^2 - 2x = 3$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 1 .
   (a) Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$.
   On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.
   (b) Démontrer que $MA = AM$.
   (c) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
   Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et en déduire que X est un vecteur propre de M.
   (d) En déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. (a) Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$.
   (b) En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera ces matrices M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Partie II

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2)$: $M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M.
2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M. Établir que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
   (a) Soit $\alpha = -1$. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si 1 est valeur propre double de M.
   (b) Soit $\alpha \neq -1$. Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable. Préciser les matrices diagonales D, semblables à M, possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2).
   (c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
   (d) Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.

Exercice 3

(Banque PT, Maths A 2024)

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$$

On considère également les polynômes $L_p(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq p}}^{3} \frac{X-k}{p-k}$ pour $p \in \{0;1;2;3\}$.

1. (a) Vérifier que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$.
   (b) Écrire de même $L_1(X), L_2(X)$ et $L_3(X)$.
   (c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$.
2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
   On notera $\|\ \|$ la norme associée.
   (b) Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q, les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3).
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ.

   On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

   On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. Pour tout $p \in [\![0;3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p), N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_pN_p]$.

   On pose alors $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$.

   L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a,b)$ est minimale.
4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.
5. Vérifier que $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$.
6. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
   On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0;3]\!]$.
   (b) Démontrer que $\delta(a,b) = \|Q - H\|^2$ où $H(X) = aX + b$.
   (c) En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0. On précisera le lien entre Q et H_0.

   On pose $\overline{Y} = \sum_{p=0}^{3} y_p$ et $\overline{XY} = \sum_{p=0}^{3} p y_p$.
7. (a) Exprimer H_0 en fonction de φ, Q et les polynômes obtenus dans la question 3 .
   (b) Déterminer H_0 en fonction de $\overline{Y}$ et $\overline{XY}$.

$\boxed{\textbf{Corrigé}}$

Corrigé de l'exercice 1

1. Λ est la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_3(t) = \sin^2(t) \\ y_3(t) = \dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{cases}$

   y n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on se limite donc d'abord à cet ensemble.

   On a, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$x(t+\pi) = \sin(t+\pi)^2 = (-\sin(t))^2 = \sin(t)^2 = x(t)$$
$$y(t+\pi) = \frac{\sin^3(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{-\sin^3(t)}{-\cos(t)} = y(t)$$

   x et y sont ainsi π-périodique, on limite donc notre étude à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on obtiendra alors la courbe Γ en entier.

   De plus x est paire et y est impaire, donc pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $M(-t)$ est l'image de $M(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

   Ainsi, on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On obtiendra la courbe Λ en entier en traçant la symétrique de la courbe tracée pour $t \in I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par rapport à l'axe (Ox).

2. x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

   Pour tout $t \in I$, on a

$$x'(t) = 2\sin(t)\cos(t) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{3\cos^2(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)}{\cos^2(t)}$$

   On en déduit le tableau de variations :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	
x_3	0	$\nearrow$	1
y_3	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||
$y'(t)$	0	$+$	

3. On a $x'(0) = y'(0) = 0$. $M(0)$ est donc un point singulier.

   De plus

$$x_3(t) \underset{t\to 0}{=} t^2 + o(t^3) \qquad \text{et} \qquad y_3(t) \underset{t\to 0}{=} t^3 + o(t^3)$$

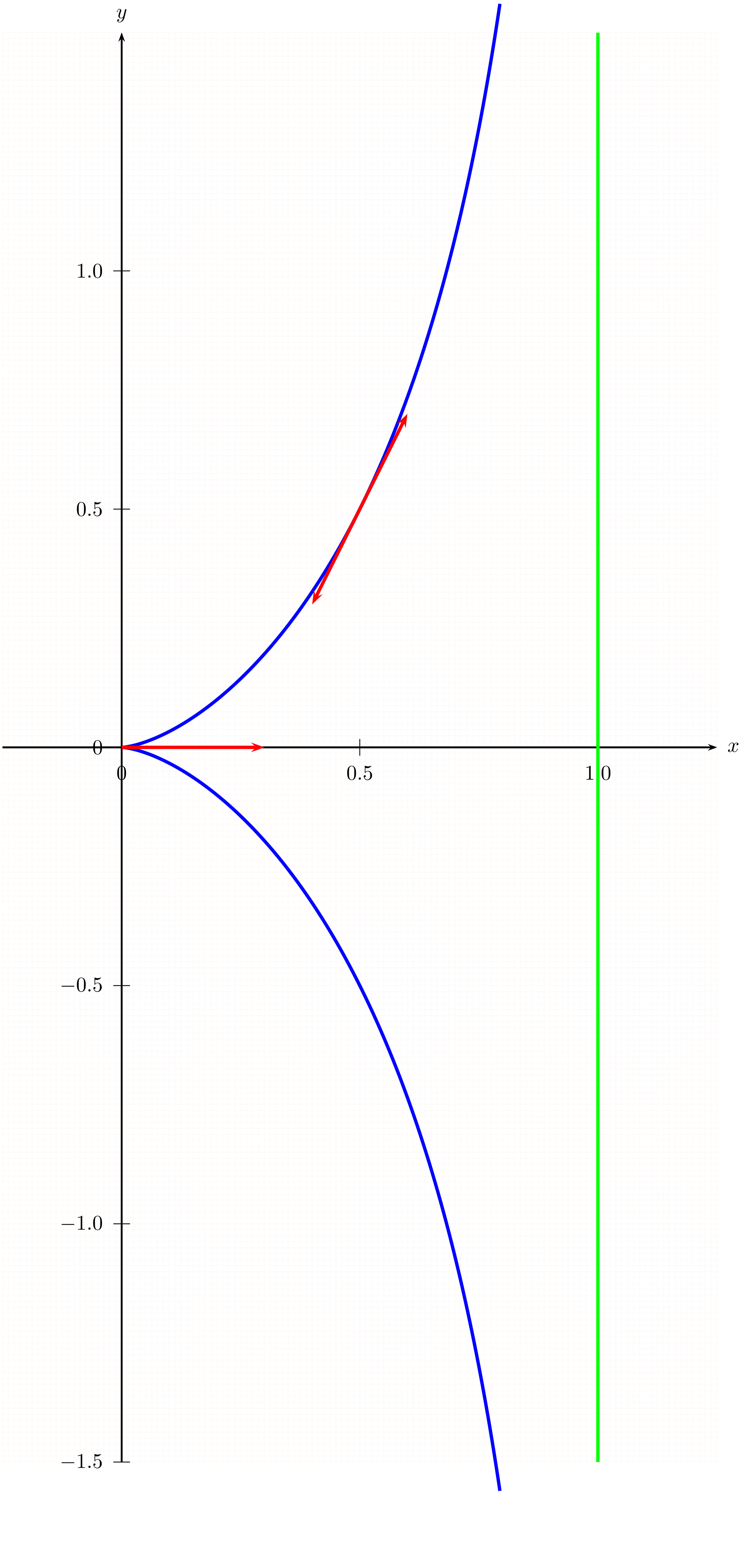
On a donc
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

On en déduit que le premier vecteur dérivée non nul est le vecteur dérivée seconde, il est égal à $\overrightarrow{i}$, et dirige la tangente à Λ en $M(0)$. Le premier vecteur dérivée lui étant non colinéaire est le vecteur dérivée troisième.

$M(0)$ est donc un point de rebroussement de première espèce et la demi-tangente en ce point est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{i}$

4. $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, le vecteur dérivée ne s'annule pas en ce point, c'est un point régulier de la courbe.

   Le vecteur dérivé en ce point est donc un vecteur directeur de la tangente à Λ en ce point et il a pour coordonnées $(1, 2)$.
5. $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{2}^-} x(t) = 1$. et $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{2}^-} y(t) = +\infty$, Λ admet donc pour asymptote en $\frac{\pi}{2}$ la droite verticale d'équation $x = 1$
6.


y
1.0
0.5
0
−0.5
−1.0
−1.5
0
0.5
1.0
x

Corrigé de l'exercice 2

1. $X^2 - 2X = X(X-2)$. Les solutions de (E_1) sont 0 et 2.

   $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$. (E_2) admet 1 comme unique solution, c'est une solution double.

   $x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0$. Les solutions de (E_3) sont -1 et 3.

2. (a) Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -3 \\ -3 & X+3 & -3 \\ -4 & 4 & X-3 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_1+C_2\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}}{=} \begin{vmatrix} X-2 & X & -X-1 \\ -3 & X & 0 \\ -4 & 0 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= X(X+1)\begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_1-L_2+L_3\to L_1}{=} X(X+1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= X(X+1)(X-3)
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de la matrice A sont -1, 0 et 3.

   (b) χ_A est scindé à racines simples,donc la matrice A est diagonalisable.

   (c) Soit E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-2y+3z=0 \\ 3x-2y+3z=0 \\ 4x-4y+4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

   Ainsi, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-2y+3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ 4x-4y+3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} z=0, \\ y=x \end{cases}$$

   Ainsi, $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow (A-3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-2y+3z=0 \\ 3x-6y+3z=0 \\ 4x-4y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z$$

   Ainsi, $E_3 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   P est inversible, son déterminant vaut 1 et on a $D = P^{-1}AP$, donc $A = PDP^{-1}$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

   On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 1 .

(a) Multiplier une égalité matricielle par une matrice inversible donne une égalité équivalente. Ainsi,

$M^2 - 2M = A \Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP - 2P^{-1}MP = P^{-1}AP \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D.$

On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

(b) On a alors $A = M^2 - 2M$.

Donc $MA = MM^2 - 2MM = (M^2 - 2M)M = AM$, M commutant avec toutes ses puissances entières.

Finalement, $MA = AM$.

(c) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

$AY = AMX = MAX = \lambda MX = \lambda Y$.

Donc le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Or A n'a que des valeurs propres simples, ses sous espaces propres sont donc de dimension 1 et X est un vecteur propre de A associé à λ. Donc le sous espace propre de A associé à λ est le sous-espace vectoriel engendré par X.

Donc Y est colinéaire à X et il existe un réel μ tel que $MX = \mu X$.

On en déduit que X est un vecteur propre de M.

(d) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A, g l'endomorphisme canoniquement associée à M, (x_1, x_2, x_3) la base de vecteurs propres de f telle que la matrice de passage de la base canonique à (x_1, x_2, x_3) soit P.

D'après la question précédente, (x_1, x_2, x_3) est une base de vecteurs propres de g, donc la matrice de g dans cette base est diagonale.

Or, par les formules de changement de base, la matrice de g dans la base (x_1, x_2, x_3) est $P^{-1}MP = \Delta$.

Donc la matrice Δ est diagonale.

4. (a) Posons $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$$\Delta^2 - 2\Delta = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a = -1 \\ b^2 - 2b = 0 \\ c^2 - 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \text{ ou } b = 2 \\ c = -1 \text{ ou } c = 3 \end{cases}$$

Les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$ sont donc :

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) D'après les questions 3.(a) et 3.(d), M est solution de $M^2 - 2M = A$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale solution de

$\Delta^2 - 2\Delta = D$.

Ainsi, les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$ sont

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ et } P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Partie B :

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2)$: $M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Soit M une matrice solution de $(\mathcal{E}_2)$ et P une matrice inversible.

$M^2 - 2M = \alpha I$ donc $P^{-1}M^2P - 2P^{-1}MP = \alpha P^{-1}IP$ et $P^{-1}M^2P = P^{-1}MPP^{-1}MP$

D'où $(P^{-1}MP)^2 - 2(P^{-1}MP) = \alpha I$.

Or toute matrice semblable à M est de la forme $P^{-1}MP$ avec P inversible.

Donc, si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M.

2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M. Soit X un vecteur propre de M associé à λ.

   $X \neq 0$, $MX = \lambda X$ et $M^2X = M(\lambda X) = \lambda^2 X$.

   Or $M^2 - 2M = \alpha I$, donc $(M^2 - 2M - \alpha I)X = 0$, soit $(\lambda^2 - 2\lambda - \alpha)X = 0$.

   Or $X \neq 0$, donc $\lambda^2 - 2\lambda - \alpha = 0$, ou encore $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.

3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.

   (a) Soit $\alpha = -1$.

   On suppose que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$. Alors, toute valeur propre de M est solution de l'équation $x^2 - 2x = -1$, qui admet 1 comme unique solution.

   Soit χ_M le polynôme caractéristique de M. $\chi_M \in \mathbb{C}_2[X]$, donc χ_M est scindé. Il est unitaire, de degré 2 et admet 1 comme seule racine.

   On en déduit que $\chi_M = (X-1)^2$, 1 est valeur propre double de M.

   Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, admettant 1 pour valeur propre double. Soit χ_M son polynôme caractéristique.

   Par hypothèse, $\chi_M = (X-1)^2$, donc χ_M est scindé, donc M est trigonalisable, semblable à $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

   $T_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $T_a^2 - 2T_a = -I$.

   T_a est donc solution de $\mathcal{E}_2$ et M, qui est semblable à T_a est aussi solution de $\mathcal{E}_2$.

   Finalement M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si 1 est valeur propre double de M.

   (b) Soit $\alpha \neq -1$. Le discriminant de l'équation $x^2 - 2x = \alpha$ vaut $4 + 4\alpha \neq 0$.

   λ_1 et λ_2 sont donc distinctes et par les relations coefficients-racines $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ et $\lambda_1\lambda_2 = -\alpha$.

   On suppose que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.

   Soit $F_1 = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) | MX = \lambda_1 X\}$ et $F_2 = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) | MX = \lambda_2 X\}$.

   Montrons que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ par analyse et synthèse.

   <u>Analyse :</u>

   Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $X_1 \in F_1$ et $X_2 \in F_2$, $X = X_1 + X_2$.

   On a alors $MX = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$. Par combinaison linaire, on en déduit : $MX - \lambda_2 X = (\lambda_1 - \lambda_2)X_1$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc $X_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(MX - \lambda_2 X)$.

   De même, on obtient $X_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(MX - \lambda_1 X)$.

   Il y a donc unicité d'une éventuelle décomposition et F_1 et F_2 sont en somme directe.

   <u>Synthèse :</u>

   Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On pose $X_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(MX - \lambda_2 X)$ et $X_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(MX - \lambda_1 X)$.

   $X_1 + X_2 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(MX - MX) + \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}X = X$.

   $MX_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(M^2X - \lambda_2 MX) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(2MX + \alpha X - \lambda_2 MX) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 MX - \lambda_1\lambda_2 X) = \lambda_1 X_1$.

   Donc $X_1 \in F_1$. Par symétrie, on montrerait de même que $X_2 \in F_2$.

   Il a donc existence d'une décomposition.

   Finalement, F_1 et F_2 sont bien supplémentaires dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

   $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ est de dimension 2, donc il y a trois possibilités :

Soit $\dim(F_1) = 2$ et $\dim(F_2) = 0$, dans ce cas $F_1 = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $M = \lambda_1 I$, donc M est diagonalisable.

Soit $\dim(F_1) = 0$ et $\dim(F_2) = 2$, dans ce cas $F_2 = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $M = \lambda_2 I$, donc M est diagonalisable..

Soit $\dim(F_1) = 1$ et $\dim(F_2) = 1$, dans ce cas $F_1 = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $M = \lambda_1 I$, M est alors semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. M est donc diagonalisable.

Ainsi, si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable.

M peut être semblable à $\lambda_1 I$ ou $\lambda_2 I$ ou à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente.

Si $M = \lambda_1 I$: $(\lambda_1 I)^2 - 2\lambda_1 I - \alpha I = (\lambda_1^2 - 2\lambda_1 - \alpha)I = 0$, donc $\lambda_1 I$ est solution de $\mathcal{E}_2$.

Si $M = \lambda_2 I$: $(\lambda_2 I)^2 - 2\lambda_2 I - \alpha I = (\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - \alpha)I = 0$, donc $\lambda_2 I$ est solution de $\mathcal{E}_2$.

Posons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et supposons M semblable à D.

$D^2 - 2D - \alpha I = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 2\lambda_1 - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 2\lambda_2 - \alpha \end{pmatrix} = 0$ car λ_1 et λ_2 sont solutions de $x^2 - 2x = \alpha$

Donc D est solution de $(\mathcal{E}_2)$. Or toute matrice semblable à D est aussi solution de $(\mathcal{E}_2)$.

Donc M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.

(d) Pour $\alpha = 0$, l'équation donnant les valeurs propres est $x^2 - 2x = 0$. Les solutions sont les matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{0, 2\}$.

Par exemple $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ convient, son polynôme caractéristique étant $X(X-2)$, il est scindé à racines simples, cette matrice est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 2.

Vérification $M_0^2 - 2M = \begin{pmatrix} 0 & 2-2 \\ 0 & 4-4 \end{pmatrix} = 0$.

Corrigé de l'exercice 3

1. (a) Un calcul direct donne

$$\boxed{L_0(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 0}}^{3} \frac{X-k}{0-k} = \prod_{k=1}^{3} \frac{X-k}{0-k} = -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{3!} = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)}$$

(b) De même on trouve

$$\boxed{L_1(X) = \frac{X}{2}(X-2)(X-3), L_2(X) = -\frac{X}{2}(X-1)(X-3) \text{ et } L_3(X) = \frac{X}{6}(X-1)(X-2)}$$

(c) Soit $(p, k) \in [\![0; 3]\!]^2$ alors si $k \neq p$, k est racine de L_p donc $L_p(k) = 0$ et si $k = p$ on a

$$L_p(p) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq p}}^{3} \frac{p-k}{p-k} = 1$$

$$\boxed{\text{On a donc } L_k(p) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si k=p} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. = \delta_{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. (a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$, on a alors

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{3}P(k)Q(k)=\sum_{k=0}^{3}Q(k)P(k)=\varphi(Q,P)$$

φ est donc symétrique

De plus, pour $(P,Q,R)\in\mathbb{R}_3[X]^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$\varphi(P,\lambda Q+R)=\sum_{k=0}^{3}P(k)(\lambda Q+R)(k)=\lambda\sum_{k=0}^{3}P(k)Q(k)+\sum_{k=0}^{3}P(k)R(k)=\lambda\varphi(P,Q)+\varphi(P,R)$$

φ est bien clairement linéaire à gauche. Comme φ est symétrique elle est donc bilinéaire symétrique.

Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ alors $\varphi(P,P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}P(k)^2\geqslant 0$ puisque P est réel

De plus si $\varphi(P,P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}P(k)^2=0$, alors chaque terme de la somme doit être nul vu que tous les termes sont réels et positifs :

$\forall k\in[\![0,3]\!], P(k)=0$. On en déduit que P, qui est un polynôme de degré 3 au plus, a au moins 4 racines distinctes : c'est donc le polynôme nul .

$\boxed{\text{Finalement, } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[X] \text{ en tant que forme bilinéaire symétrique définie positive}}$

(b) Si on regarde les produits scalaires 2 à 2 on a

$$\varphi(L_p,L_q)=\sum_{k=0}^{3}L_p(k)L_q(k)=\sum_{k=0}^{3}\delta_{p,k}\delta_{q,k}$$

Or $\delta_{p,k}\delta_{q,k}\neq 0\Leftrightarrow k=p=q$, cela veut dire donc que si $q\neq p$ on aura $\varphi(L_p,L_q)=0$

Par ailleurs, si $p=q$, on aura alors

$$\varphi(L_p,L_p)=\sum_{k=0}^{3}L_p(k)L_p(k)=\sum_{k=0}^{3}\delta_{p,k}\delta_{p,k}=\delta_{p,p}^2=1$$

De plus $\dim(\mathbb{R}_3[X])=4$ et $L_i\in\mathbb{R}_3[X]$ pour $i\in[\![0,3]\!]$

$\boxed{\text{Donc cette famille (} L_0,L_1,L_2,L_3 \text{) est bien une base orthonormée de } \mathbb{R}_3[X] \text{ pour ce produit scalaire.}}$

(c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ alors les coordonnées de Q dans la base orthonormée (L_0,L_1,L_2,L_3) sont données par

$$Q=\sum_{p=0}^{3}\varphi(L_p,Q)L_p=\sum_{p=0}^{3}\left(\sum_{k=0}^{3}L_p(k)Q(k)\right)L_p=\sum_{p=0}^{3}Q(p)L_p$$

$\boxed{\text{Dans la base (} L_0,L_1,L_2,L_3 \text{) , le polynôme } Q\in\mathbb{R}_3[X] \text{ aura pour coordonnées } (Q(0),Q(1),Q(2),Q(3))}$

3. On va utiliser la base canonique $\mathcal{B}=(1,X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ ainsi que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour avoir une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$.

Posons $Q_1=\dfrac{1}{\sqrt{\varphi(1,1)}}=\dfrac{1}{2}$

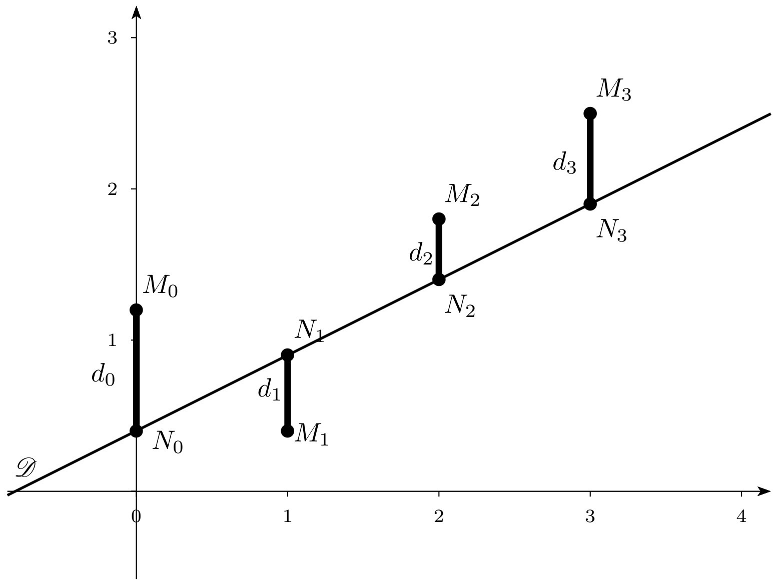
On a alors

$X-\varphi(X,Q_1)Q_1)=X-\dfrac{3}{2}$ puis

$$Q_2=\frac{X-\frac{3}{2}}{\varphi\left(X-\frac{3}{2},X-\frac{3}{2}\right)}=\frac{X-\frac{3}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathcal{C}=\left(\frac{1}{2},\frac{X-\frac{3}{2}}{\sqrt{5}}\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_1[X] \text{ muni de } \varphi}$$

4. On pose alors $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$. Voici le schéma qui illustre les distances d_p pour $p \in [\![0,3]\!]$



5. On a $N_p = (p, ap+b)$ car N_p d'abscisse p appartient à la droite $\mathscr{D} : y = ax+b$ ce qui fait que $d_p = \sqrt{(p-p)^2 + (y_p - ap - b)^2} = |y_p - ap - b|$.

   Ainsi
   $$\boxed{\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2 = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2}$$

6. (a) Un polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ passant par les points M_i doit vérifier $Q(i) = y_i$ pour $i \in [\![0,3]\!]$. Il doit donc , d'après la question 2.(c) , avoir pour coordonnées (y_0, y_1, y_2, y_3) dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) . Ainsi un tel polynôme Q est unique à cause de l'unicité des coordonnées et s'exprime sous la forme $\boxed{Q = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i}$

   (b) On a $\|Q-H\|^2 = \varphi(Q-H, Q-H) = \sum_{p=0}^{3} (Q(p) - H(p))^2 = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2 = \delta(a,b)$

   $\boxed{\text{Donc on a bien } \delta(a,b) = \|Q-H\|^2 \text{ où } H(X) = aX + b}$

   (c) On a par définition de la distance
   $$d(Q, \mathbb{R}_1[X]) = \min\left\{\|Q-H\|^2 \mid H \in \mathbb{R}_1[X]\right\}$$
   En prenant $H = aX + b$, on aura donc d'après la question précédente :
   $$d(Q, \mathbb{R}_1[X]) = \min\left\{\delta(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
   De plus on sait que ce minimum est atteint une seule fois lorsque $H = H_0$ le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$

   $\boxed{\delta \text{ a donc un minimum global sur } \mathbb{R}^2 \text{ atteint uniquement en } (a_0, b_0) \text{ tel que } H = a_0X + b_0 \text{ soit le projeté orthogonal de } Q \text{ sur } \mathbb{R}_1[X]}$

7. (a) Par définition du projeté orthogonal, on a
   $$H_0 = \varphi\left(Q, \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \varphi\left(Q, \frac{X - \frac{3}{2}}{\sqrt{5}}\right)\frac{X - \frac{3}{2}}{\sqrt{5}}$$

(b) En appliquant le produit scalaire on trouve :

$$H_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} y_k + \frac{1}{5}\left(\sum_{k=0}^{3} y_k\left(k-\frac{3}{2}\right)\right)\left(X-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\overline{Y} + \frac{1}{5}\left(\overline{XY}-\frac{3}{2}\overline{Y}\right)\left(X-\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement, en développant } H_0 = \frac{1}{10}(7\overline{Y}-3\overline{XY}) + \frac{1}{10}(2\overline{XY}-3\overline{Y})X}$$